Pe marginea materialelor publicate în Gazeta matematică

Constantin P. Niculescu, Universitatea din Craiova[1]

Scopul acestei rubrici este acela de a comenta diferitele rezultate apărute în paginile Gazetei matematice, cu scopul de a evidenția noi consecințe şi noi conexiuni, de a prezenta demonstrații mult mai scurte, de a discuta aspectele de prioritate etc. Cititorii dornici de a contribui la această rubrică mă pot contacta fie pe adresa Universității din Craiova, fie prin e-mail, la adresa tempus@oltenia.ro

Asupra inegalității lui Hardy

Găsirea unui rezultat nou şi interesant în Matematică este fără îndoială o chestiune de profesionalism, de tenacitate şi, de ce nu, de noroc. Dar, după etapa de descoperire, autorul se vede confruntat cu sarcina încă şi mai dificilă a raportării rezultatului său la literatura de specialitate deja existentă. Din proprie experiență ştiu că este vital ca *înainte* de a trimite un material spre publicare să se discute cu cât mai multe persoane competente spre a avea un maximum de confidență asupra gradului de noutate şi de finisare. Apoi, sursele bibliografice trebuies indicate cu maximum de acuratețǎ şi onestitate. Tradiționala muncă de documentare în bibliotecă trebuie astăzi dublată de documentarea prin INTERNET, care permite accesul la bazele de date ale unor importante universități şi grupuri profesionale. În plus, e-mailul permite adresarea unor chestiuni ştiințifice direct marilor specialişti de pretutindeni.

Se poate întâmpla ca nici autorul şi nici redacția să nu sesizeze că anumite rezultate sunt cunoscute. Multe din articolele publicate în Gazeta matematică, deşi foarte interesante, suferă mult la capitolul referințelor bibliografice.

Recentul articol al domnilor Mihai Onucu Drâmbe şi Marian Ursărescu [2] (publicat fără a indica vreo bibliografie) redescoperă *Inegalitatea lui Hardy*. Cităm din celebra carte de *Inegalități* a lui Hardy, Littlewood şi Polya [4], pp. 239-240:

“ *Dacă* $p > 1,\ a_n \geq 0$ *şi* $A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ *atunci*

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n\geq 1} a_n^p \tag{H}$$

exceptând cazul când toți termenii a_n *sunt nuli. Constanta din membrul drept este cea mai bună cu putință… Această teoremă a fost descoperită de Hardy* [3], *cu observația că Hardy nu a putut indica cea mai bună constantă. Această imperfecțiune a fost remediată de Landau* [5]. ”

În articolul [2] puterea p este înlocuită cu 1/s ($s < 1$, $s \neq 0$), iar termenii a_n sunt înlocuiți cu a_n^s. Cazul $0 < s < 1$ apare astfel complet acoperit de abordarea din [4]. Cazul $s < 0$ nu apare în [4], dar nici el nu este nou. Vezi [6], unde se demonstrează un rezultat mult mai general: *Fie* **a** = $(a_1,\ldots,a_n)$ *un n - uplu de numere strict pozitive şi fie r < s două numere reale. Atunci media de ordinul s a n – uplului*

$$M_1^r(\mathbf{a}),\ \ldots\ ,\ M_n^r(\mathbf{a})$$

nu poate depăşi media de ordinul r a n – uplului

[1] Articol publicat în *Gazeta matematică*, revistă de cultură matematică pentru tineret, **CVII** (2002), nr. 11, pp. 432-434.

$$M_1^s(\mathbf{a}), \ldots, M_n^s(\mathbf{a});$$

egalitatea are loc dacă şi numai dacă toate componentele lui **a** sunt egale. Am notat

$$M_n^r(\mathbf{a}) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{1/r}, & \text{daca } r \neq 0 \\ \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n}, & \text{daca } r = 0. \end{cases}$$

Cititorul interesat va afla în [1] un istoric bine documentat al evoluției inegalităților mixte, precum şi comentarii privind cea mai bună constantă în cazul familiilor de lungime *n*.

Ca aplicație a cazului $0 < s < 1$, domnii Mihai Onucu Drâmbe şi Marian Ursărescu [2] indică *inegalitatea lui T. Carleman*,

$$\sum_{k=1}^{n} (a_1 a_2 \ldots a_k)^{1/k} < e \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{pentru orice} \quad a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$$

pe care însă în mod greşit o atribuie lui Hardy. Istoria ei este povestită în [4], la pag. 249.

Demonstrația rezultatului principal din [2] se face argumentând o inegalitate mai puternică, notată acolo cu numărul (4), dar pe moment nu ne este clar cum se raportează aceasta la alte rezultate deja cunoscute (ca de exemplu, Teorema 8 din [1]).

Comentariile de mai sus pe marginea unui articol cu o bază matematică altfel corectă, poate vor apare foarte descurajante pentru mulți dintre colaboratorii Gazetei matematice. Această revistă însă, cu cei peste o sută de ani de apariție neîntreruptă, este o *revistă de prestigiu*, iar pentru menținerea şi ridicarea acestui prestigiu trebuie să ne conformăm unor standarde de profesionism cât mai ridicate.

Bibliografie

[1] A. Čižmešija and J. Pečarić, *Mixed means and Hardy's inequality,* Mathematical Inequalities & Applications, **1** (1998), 491-506.

[2] Mihai Onucu Drâmbe şi Marian Ursărescu, *O generalizare a două inegalități importante*, Gazeta matematică, **CV** (2000), nr. 10, pp. 375-380.

[3] G. H. Hardy, *Note on a theorem of Hilbert*, Math. Zeitschr., **6** (1920), 314-317.

[4] G. H. Hardy, Littlewood şi Polya, *Inequalities,* Cambridge Univ. Press, 2nd Ed., 1951.

[5] E. Landau, *A note on a theorem concerning series of positive terms*, J. London Math. Soc., **1** (1926), 38-39.

[6] B. Mond and J. Pečarić, *A Mixed Means Inequality*, Austral. Math. Soc. Gazette, **23** (1996), no. 2, pp. 67-70.

Prof. Constantin P. Niculescu, Universitatea din Craiova, Facultatea de matematică-informatică, Str. A. I. Cuza 13, Craiova 1100